

Logaritmo

O logaritmo de um número x na base y é igual ao expoente z , no qual, $\text{base}(y)$ elevado ao logaritmo(z) é igual ao logaritmando(x), sabendo também que x e y são números reais, tal que $y > 0$ e $y \neq 1$. O logaritmo seria a função inversa da exponencial. Para se resolver operações com logaritmo, primeiramente tem que se saber as propriedades da potenciação, pois essas operações se comportam da mesma forma

Calculando um Logaritmo

Uma maneira bem simples de se calcular uma operação logarítmica seria aplicar sua definição.

$$\log_y^x = z \iff y^z = x$$

O logaritmo de x na base y é igual à z , se e somente se, a base y elevada ao logaritmo z ser igual ao logaritmando x .

Exemplos

1) Qual o logaritmo de 36 na base 6?

Pensamos então que $\log_6^{36} = z$, logo por definição devemos pensar que,

$$6^z = 36, \text{ ou seja, qual o número que eleva 6 que resulta em 36?}$$

Desta maneira, utilizando as propriedades da potenciação chegaríamos na resposta 2, pois $6^2 = 36$.

2) Qual seria a base do logaritmo, sabendo que o logaritmo é 5 e o logaritmando é 32?

Da mesma maneira que foi apresentado anteriormente podemos resolver essa operação por definição!!!

$\log_y^{32} = 5$, vemos agora que se pede a base do logaritmo, então devemos pensar em qual número que elevado a 5 resulta em 32?! Dessa forma:

$y^5 = 32$, buscamos a raiz quinta de 32 que resulta em 2, pois $\sqrt[5]{32} = 2$.

Definição dos logaritmos

1º O logaritmo de qualquer base, cujo logaritmando seja igual a 1, o resultado será igual a 0, ou seja:

$$\log_y 1 = 0$$

Exemplo:

$\log_{1001} 1 = z$. $\Leftrightarrow 1001^z = 1$, Qualquer número elevado a zero resulta em 1. Logo $z = 0$.

2º Quando o logaritmando é igual a base, o logaritmo será igual a 1, assim:

$$\log_x x = 1.$$

Exemplo:

$$\log_{32} 32 = 1, \text{ pois } 32^1 = 32$$

3º Quando o logaritmo de x na base x possui uma potência m , ele será igual ao expoente m , ou seja:

$$\log_x x^m = m$$

Usando a definição $x^m = x^m$.

Exemplo:

$$\log_5 5^3 = 3, \text{ pois se logaritmo é "uma potência" nas propriedades da}$$

potência, quando há potência de potência, basta multiplicar os expoente, porém como é logaritmo, resolve-se o logaritmo e depois multiplica com o expoente ou em muitos casos, descemos o expoente multiplicado o logaritmo.

4º Quando dois logaritmos com a mesma base são iguais, os logaritmandos também serão iguais, ou seja:

$$\log_y b = \log_y a \Leftrightarrow b = a$$

Exemplo:

$\log_2 5 = \log_2 x \rightarrow$ se a base dos logaritmos são iguais a 2 e os logaritmos são iguais, isso implica que os logaritmandos também são iguais, logo:

$$\log_2 5 = \log_2 x \Rightarrow 5 = x \text{ ou } x = 5$$

5º A potência de base (x), expoente $\log_x z$ será igual a z, ou seja:

$$x^{\log_x z} = z$$

Exemplo:

$$5^{\log_5 25} = x$$

Anteriormente foi dito que as operações que envolvem logaritmo são inversas às operações de potência, utilizando esse argumento, pode se afirmar que quando um número é multiplicado pelo seu inverso ocorre que o resultado é 1, isso se e somente se, o inverso possuir numerador igual à 1. Esse fato se repete nas operações logarítmicas se as bases forem iguais, que no caso $5 = 5$, então:

$5^{\log_5 25} = 25$, pois como as bases são iguais e são operações inversa, teremos o logaritmando com resposta. Mas, outro meio seria resolver o logaritmo e elevar o resultado na base que irá dar o mesmo resultado,

Propriedades dos Logaritmos

Logaritmo de um produto

O logaritmo de um produto é igual a soma de seus logaritmos:

$$\log_y^{(x.k)} = \log_y^x + \log_y^k$$

Exemplo: Sabe-se que o $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, aproximadamente, calcule $\log 6$:

$$\log 6 = \log (2.3) \Rightarrow \log 2 + \log 3 \Rightarrow 0,3 + 0,48 = 0,78$$

Como os valores são aproximados, na calculadora temos que o logaritmo de 6 resulta, aproximadamente, 0,78.

Logaritmo de um quociente

O logaritmo de um quociente é igual a diferença dos logaritmos:

$$\log_y \left(\frac{x}{k} \right) = \log_y x - \log_y k$$

Exemplo: Calcule o $\log \left(\frac{7}{3} \right)$, sabendo que $\log 3 = 0,48$ e $\log 7 = 0,85$, aproximadamente.

Sabemos que os logaritmos de 7 e 3 estão na base 10, assim como a situação-problema, então para solucionar esse problema podemos aplicar a propriedade da divisão de logaritmos, onde:

$$\log_3 7 = \log 7 - \log 3 = 0,85 - 0,48 = 0,37$$

Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência é igual ao produto dessa potência pelo logaritmo:

$$\log_y x^k = k \cdot \log_y x$$

Exemplo:

$$\log_2 2^3 = x \Rightarrow \log_2 8 = 3$$

De acordo com a propriedade,

$$\log_2 2^3 = x \Rightarrow 3 \cdot \log_2 2 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

Mudança de base

Podemos mudar a base de um logaritmo usando a seguinte relação:

$$\log_x k = \left(\frac{\log_y k}{\log_y x} \right)$$

Exemplo: Mude para a base 2 a seguinte operação, sem que altere seu devido valor: Obs($\log_2 5 \approx 2,32$ e $\log_2 3 \approx 1,58$)

$$\log_3 5 = \log_3 5 \Rightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \Rightarrow \frac{2,32}{1,58} \approx 1,46$$

Resposta

$$\log_3 5 \approx 1,46$$

Raiz no logaritmo

O logaritmo de uma raiz é igual ao inverso do índice da raiz multiplicado pelo logaritmo:

$$\log_y \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \cdot \log_y x$$

Exemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = ?$$

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \log_2 2^{\sqrt[3]{8}} = \log_2 2^{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \log_2 2^{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \times \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

OU

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2} \times \log_2 8 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Resposta = $\frac{3}{2}$

Base com expoente ou raiz

O logaritmo de um número, em uma base elevada a uma potência, é igual à multiplicação do inverso do expoente dessa base.

$$\log_{y^k}^x = \frac{1}{k} \cdot \log_y^x$$

$$\log_{\sqrt[k]{y}}^x = k \cdot \log_y^x$$

1º Exemplo

$$\log_{2^2}^{16} = ?$$

$$\log_{2^2}^{16} = \log_4^{16} = 2 \quad \text{ou} \quad \log_{2^2}^{16} = \frac{1}{2} \times \log_2^{16} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

Resposta= 2

2º Exemplo

$$\log_{\sqrt{9}}^{81} = ?$$

$$\log_{\sqrt{9}}^{81} = \log_3^{81} = 4 \quad \text{ou} \quad \log_{\sqrt{9}}^{81} = 2 \times \log_9^{81} = 2 \times 2 = 4$$

Resposta= 4